1. チーム A と B が複数回試合を行って優勝チームを決めるものとする。ただし、いずれの試合においても、引き分けはないものとし、チーム A が勝つ確率は $q\ (0<q<1)$ であり、各試合の勝敗は互いに独立に決まるとする。このとき、次の 2 種類のルールを考える。

ルール 1 ：最大 3 回試合を行い、先に 2 勝したチームを優勝とする。

ルール 2 ：どちらか一方が 2 連勝するまで試合を繰り返し、2 連勝したチームを優勝とする。

(1) ルール 1 を採用した場合に、チーム A が優勝する確率 $P_1(q)$ を q で表せ。

(2) ルール 2 を採用した場合に、チーム A が優勝する確率 $P_2(q)$ を q で表せ。

(3) $P_1(q) \geqq P_2(q)$ となる条件を求めよ。

（15 九州大）

(1)

(ア) A が 1 回目と 2 回目の試合に勝つ場合

q^2

(イ) A が 1 回目と 3 回目の試合に勝つ場合

$q\cdot(1-q)\cdot q$

$=q^2(1-q)$

(ウ) A が 2 回目と 3 回目の試合に勝つ場合

$(1-q)\cdot q\cdot q$

$=q^2(1-q)$

以上より、求める確率は

$q^2+q^2(1-q)+q^2(1-q)$

$\boxed{=q^2(3-2q)}$

(2)

(ア) A が 1 回目に勝つ場合

A が 1 回目に勝ってから、B が勝ち A が勝つというセットが n 回 $(n=0,1,2,\cdots)$ 続き、最後に A が勝つので、その確率は

$$\sum_{n=0}^{\infty} q\cdot\{(1-q)\cdot q\}^n\cdot q$$

これは公比が $q(1-q)$ の等比数列で、$0<q(1-q)<1$ より収束し

$$\frac{q^2}{1-q(1-q)}$$

$$=\frac{q^2}{q^2-q+1}$$ となる。

(イ) A が 1 回目に負ける場合

B が勝ち A が勝つというセットが n 回 $(n=1,2,3,\cdots)$ 続き、最後に A が勝つので、その確率は

$$\sum_{n=1}^{\infty}\{(1-q)\cdot q\}^n\cdot q$$

これは公比が $q(1-q)$ の等比数列で、$0<q(1-q)<1$ より収束し

$$\frac{q^2(1-q)}{1-q(1-q)}$$

$$=\frac{q^2-q^3}{q^2-q+1}$$ となる。

以上より、求める確率は

$$\frac{q^2}{q^2-q+1}+\frac{q^2-q^3}{q^2-q+1}$$

$$\boxed{=\frac{2q^2-q^3}{q^2-q+1}}$$

(3)

条件より

$$q^2(3-2q)\geqq\frac{2q^2-q^3}{q^2-q+1}$$

$q^2-q+1>0$ より、両辺にこれをかけて

$q^2(3-2q)(q^2-q+1)\geqq 2q^2-q^3$

$q^2>0$ より、両辺をこれで割って

$(3-2q)(q^2-q+1)\geqq 2-q$

$-2q^3+5q^2-5q+3\geqq 2-q$

$2q^3-5q^2+4q-1\leqq 0$

$(q-1)(2q^2-3q+1)\leqq 0$

$(q-1)^2(2q-1)\leqq 0$

$(q-1)^2>0$ より、両辺をこれで割って

$2q-1\leqq 0$

$$q\leqq\frac{1}{2}$$

以上より、求める条件は

$$\boxed{0<q\leqq\frac{1}{2}}$$