1. 1から n までの自然数 $1,2,3,\cdots,n$ の和を S とするとき、次の問に答えよ。

(1) n を 4 で割った余りが 0 または 3 ならば、S が偶数であることを示せ。

(2) S が偶数ならば、n を 4 で割った余りが 0 または 3 であることを示せ。

(3) S が 4 の倍数ならば、n を 8 で割った余りが 0 または 7 であることを示せ。

（08 神戸大）

(1)

$S=\dfrac{1}{2}n(n+1)$ である。

(ア) n を 4 で割った余りが 0 のとき

$n=4k$ (k は自然数) と表すことができるので

$S=\dfrac{1}{2}\cdot 4k\cdot(4k+1)$

$=2k(4k+1)$

より S は偶数である。

(イ) n を 4 で割った余りが 3 のとき

$n=4k-1$ (k は自然数) と表すことができるので

$S=\dfrac{1}{2}\cdot(4k-1)\cdot 4k$

$=2k(4k-1)$

より S は偶数である。

以上より、n を 4 で割った余りが 0 または 3 ならば、S が偶数である。

(2)

示したい命題の対偶「n を 4 で割った余りが 0 でも 3 でもなければ、S は偶数ではない」を示す。

n を 4 で割ったときの余りは $0,1,2,3$ のいずれかである。

(ア) n を 4 で割った余りが 1 のとき

$n=4k-3$ (k は自然数) と表すことができるので

$S=\dfrac{1}{2}\cdot(4k-3)\cdot(4k-2)$

$=(4k-3)(2k-1)$

より、$(4k-3),(2k-1)$ はいずれも奇数で、奇数の積である S は偶数ではない。

(イ) n を 4 で割った余りが 2 のとき

$n=4k-2$ (k は自然数) と表すことができるので

$S=\dfrac{1}{2}\cdot(4k-2)\cdot(4k-1)$

$=(2k-1)(4k-1)$

より、$(2k-1),(4k-1)$ はいずれも奇数で、奇数の積である S は偶数ではない。

以上より、n を 4 で割った余りが 0 でも 3 でもなければ、S は偶数ではないため、S が偶数ならば、n を 4 で割った余りが 0 または 3 である。

(3)

示したい命題の対偶「n を 8 で割った余りが 0 でも 7 でもなければ、S は 4 の倍数ではない」を示す。

n を 8 で割ったときの余りは $0,1,2,3,4,5,6,7$ のいずれかである。

(ア) n を 8 で割った余りが 1 または 5 のとき

n を 4 で割った余りが 1 になるので、(2) より、S は偶数ではないので、4 の倍数ではない。

(イ) n を 8 で割った余りが 2 または 6 のとき

n を 4 で割った余りが 2 になるので、(2) より、S は偶数ではないので、4 の倍数ではない。

(ウ) n を 4 で割った余りが 3 のとき

$n=8k-5$ (k は自然数) と表すことができるので

$S=\dfrac{1}{2}\cdot(8k-5)\cdot(8k-4)$

$=(8k-5)(4k-2)$

より、$(8k-5)$ は奇数、$(4k-2)$ は 4 の倍数ではない偶数であり、その積である S は 4 の倍数ではない。

(エ) n を 4 で割った余りが 4 のとき

$n=8k-4$ (k は自然数) と表すことができるので

$S=\dfrac{1}{2}\cdot(8k-4)\cdot(8k-3)$

$=(4k-2)(8k-3)$

より、$(4k-2)$ は 4 の倍数ではない偶数、$(8k-3)$ は奇数であり、その積である S は 4 の倍数ではない。

以上より、n を 8 で割った余りが 0 でも 7 でもなければ、S は 4 の倍数ではないため、S が 4 の倍数ならば、n を 8 で割った余りが 0 または 7 である。