1. 座標平面上の 2 点 $Q(1,1),\ R(2,\dfrac{1}{2})$ に対して、点 P が円 $x^2+y^2=1$ の周上を動くとき、次の問に答えよ。

(1) △PQR の重心の軌跡を求めよ。

(2) 点 P から △PQR の重心までの距離が最小となるとき、点 P の座標を求めよ。

(3) △PQR の面積の最小値を求めよ。

（08 大阪教育大）

(1)

求める重心の座標を $\mathrm{G}(x,y)$ とする。
点 $\mathrm{P}(X,Y)$ とする。
$X^2+Y^2=1\cdots$① を満たす。
G は △PQR の重心なので

$x=\dfrac{X+1+2}{3},\ y=\dfrac{1+\frac{1}{2}+Y}{3}$

これを変形して
$X=3x-3,\ Y=3y-\dfrac{3}{2}$
これを ① に代入して
$(3x-3)^2+(3y-\dfrac{3}{2})^2=1$

$\boxed{(x-1)^2+(y-\dfrac{1}{2})^2=\dfrac{1}{9}}$

中心が $(1,\dfrac{1}{2})$、半径が $\dfrac{1}{3}$ の円である。

(2)

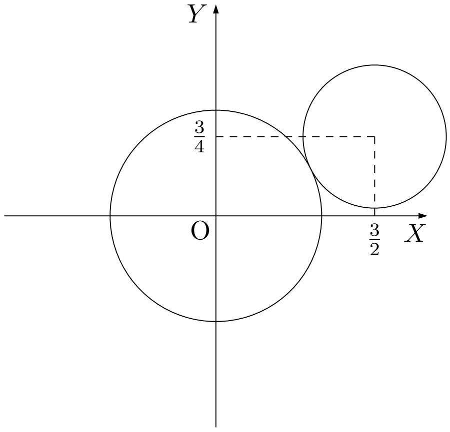
(1) より点 $\mathrm{P}(X,Y)$ と重心との距離を L とすると

$L^2=(X-\dfrac{X+3}{3})^2+(Y-\dfrac{Y+\frac{3}{2}}{3})^2$

$=(\dfrac{2}{3}X-1)^2+(\dfrac{2}{3}Y-\dfrac{1}{2})^2$

$\dfrac{9}{4}L^2=(X-\dfrac{3}{2})^2+(Y-\dfrac{3}{4})^2$

(X,Y) は (1) の ① を満たすので、$\dfrac{9}{4}L^2$ ひいては L が最小となるのは、下図のように円 $x^2+y^2=1$ と円 $(X-\dfrac{3}{2})^2+(Y-\dfrac{3}{4})^2$ が外接するときである。



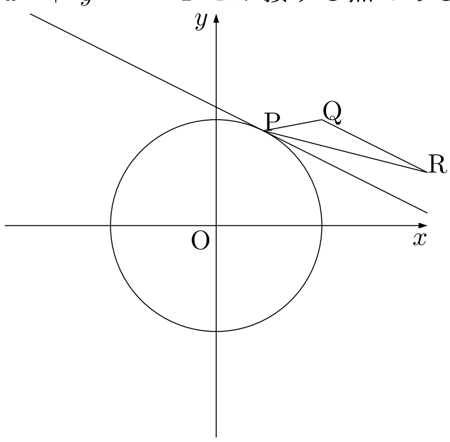
このとき、$Y=\dfrac{1}{2}X$ なので

$X=\dfrac{2\sqrt{5}}{5},Y=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ である。

$\boxed{(\dfrac{2\sqrt{5}}{5},\dfrac{\sqrt{5}}{5})}$

(3)

△PQR の面積が最小となるのは、底辺 QR を固定して考えると、高さが最小となるとき、すなわち点 P が下図のように直線 QR に平行な直線と円 $x^2+y^2=1$ とが接する点であるときである。



直線 QR は
$x+2y-3=0$ であり、原点からこの直線までの距離は

$\dfrac{|-3|}{\sqrt{5}}=\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

原点から点 P までの距離は 1 なので、点 P から直線 QR までの距離は

$\dfrac{3\sqrt{5}}{5}-1=\dfrac{3\sqrt{5}-5}{5}$

線分 QR の長さは $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ なので

$\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}\cdot\dfrac{3\sqrt{5}-5}{5}\cdot\dfrac{1}{2}$

$\boxed{=\dfrac{3-\sqrt{5}}{4}}$