例題

白玉 4 個と赤玉 3 個が入っている袋から、A さんと B さんが順に 1 個ずつ玉を取り出す。B さんが取り出した玉が赤玉であるときに、A さんが取り出した玉が赤玉であった確率を求めよ。

1. 公式による解法

   B さんが赤玉を取り出す確率は

   $\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6}+\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}=\frac{3}{7}$

   A さんが赤玉を取り出してかつ B さんが赤玉を取り出す確率は

   $\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6}=\frac{1}{7}$

   以上より、条件付き確率の公式から、求める確率は

   $\dfrac{\frac{1}{7}}{\frac{3}{7}}=\frac{1}{3}$

2. 表による解法

   A さんが赤玉を取り出すことを ◯、赤玉を取り出さないこと（白玉を取り出すこと）を $\times$ とする。

   B さんが赤玉を取り出すことを $+$、赤玉を取り出さないこと（白玉を取り出すこと）を $-$ とする。

	$+$	$-$	計
◯	$\frac{6}{42}$	$\frac{12}{42}$	$\frac{18}{42}$
$\times$	$\frac{12}{42}$	$\frac{12}{42}$	$\frac{24}{42}$
計	$\frac{18}{42}$	$\frac{24}{42}$	1

   この問題では、B さんが赤玉を取り出しているので、$+$ の部分だけになる。

	$+$	$-$	計
◯	$\frac{6}{42}$	$\frac{12}{42}$	$\frac{18}{42}$
$\times$	$\frac{12}{42}$	$\frac{12}{42}$	$\frac{24}{42}$
計	$\frac{18}{42}$	$\frac{24}{42}$	1

   この $+$ の部分だけで考えると、求める確率は

   $\dfrac{\frac{6}{42}}{\frac{18}{42}}=\frac{1}{3}$ となる。

問題 1

ある感染症は 10 万人に 1 人の割合で感染していることがわかっている。この感染症の検査は 99%の精度である（この感染症に感染している人がこの検査を受けると 99%の確率で陽性の結果が出て、この感染症に感染していない人がこの検査を受けると 99%の確率で陰性の結果が出る）。A さんがこの感染症の検査をして陽性と出たときに、A さんがこの感染症に感染している確率はいくらか？

1. 公式による解法

   A さんが陽性の結果を出す確率は

   $\frac{1}{100000}\cdot\frac{99}{100}+\frac{99999}{100000}\cdot\frac{1}{100}=\frac{100098}{10000000}$

   A さんが感染していてかつ陽性の結果出す確率は

   $\frac{1}{100000}\cdot\frac{99}{100}=\frac{99}{10000000}$

   以上より、条件付き確率の公式から、求める確率は

   $\frac{\frac{99}{10000000}}{\frac{100098}{10000000}}=\frac{11}{11122}$

2. 表による解法

   A さんが感染していることを ◯、感染していないことを $\times$ とする。

   A さんが陽性の結果を出すことを $+$、陽性の結果を出さないこと（陰性の結果を出すこと）を $-$ とする。

	$+$	$-$	計
◯	$\frac{99}{10000000}$	$\frac{1}{10000000}$	$\frac{100}{10000000}$
$\times$	$\frac{99999}{10000000}$	$\frac{9899901}{10000000}$	$\frac{9999900}{10000000}$
計	$\frac{100098}{10000000}$	$\frac{9899902}{10000000}$	1

この問題では、A さんが陽性の結果を出しているので、$+$ の部分だけになる。

	$+$	$-$	計
◯	$\frac{99}{10000000}$	$\frac{1}{10000000}$	$\frac{100}{10000000}$
$\times$	$\frac{99999}{10000000}$	$\frac{9899901}{10000000}$	$\frac{9999900}{10000000}$
計	$\frac{100098}{10000000}$	$\frac{9899902}{10000000}$	1

この $+$ の部分だけで考えると、求める確率は

$\frac{\frac{99}{10000000}}{\frac{100098}{10000000}}=\frac{11}{11122}$ となる。

＊例えば 1 億人が検査を受けると考えると分数がなくなって少し見やすくなる。

	$+$	$-$	計
◯	990	10	1000
$\times$	999990	98999010	99999000
計	1000980	98999020	100000000

問題 2（モンティ・ホール問題）

区別のつかない 3 つの箱があり、その中に 1 個だけ、当たりくじの入っている箱がある。解答者は、まず 1 つの箱を選ぶ。司会者は、どの箱に当たりくじが入っているかを知っているので、残った 2 つの箱から当たりくじの入っていない箱を 1 個だけ取り除く。そこで、解答者は司会者から、選んだ箱を変えるチャンスを与えられる。解答者は箱を変えたほうがいいか、それともそのままのほうがいいか。

便宜上、選んだ箱を A、司会者が取り除いた箱を B、残りの箱を C とする。
そのままにしたときに当たる確率を求める。

1. 公式による解法

   司会者が箱 B を取り除く確率は
   $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{1}{3}\cdot 1=\frac{1}{2}$
   箱 A が当たりでかつ司会者が箱 B を取り除く確率は
   $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$
   以上より、条件付き確率の公式から、求める確率は
   $\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$
   箱を変えたときに当たる確率は
   $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$
   よって、箱を変えたほうがよい。

2. 表による解法

   箱 A が当たりであることを ◯、当たりでないことを × とする。
   司会者が箱 B を取り除くことを +、取り除かないことを − とする。

	+	−	計
◯	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$
×	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
計	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

   この問題では、B さんが赤玉を取り出しているので、+ の部分だけになる。

	+	−	計
◯	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$
×	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
計	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

   この + の部分だけで考えると、求める確率は
   $\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$ となる。
   箱を変えたときに当たる確率は
   $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$
   よって、箱を変えたほうがよい。